

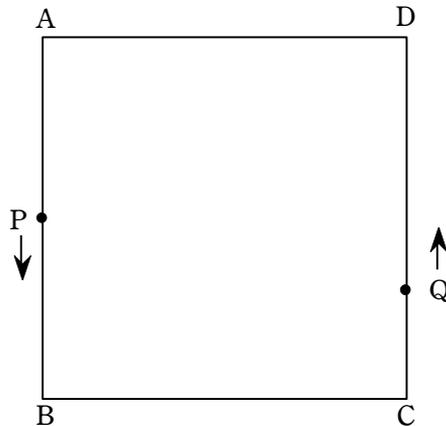
平成 28 年度 入試問題 問 5 解答と解説

平成 28 年度入試問題 5 の解答と解説を行います。この問題は正方形の辺上を動く 2 点が、それぞれ異なる色を塗りながら進んでいくというものです。点が移動していく様子を頭の中にイメージすることで問題への理解が深まります。

- 5] グラウンド上に、一辺が 10 の正方形 ABCD がある。この正方形の辺上に、P は白色、Q は黄色のラインを、それぞれラインカーで引いていく。

- ① P, Q はそれぞれ点 A, C を出発し、
P は、 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B \dots\dots$,
Q は、 $C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \dots\dots$,
の順で反時計回りにラインを引く。
② ラインを引く速さは常に一定で、P は 1 秒間に 5 だけ、Q は 1 秒間に 3 だけ引く。
③ すでにどちらかの色のラインが引いてあるところに、さらにラインを引き直す場合、ラインは後から引いた色になる。

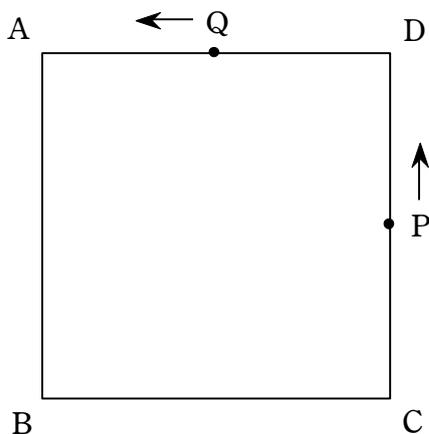
このとき、次の問いに答えなさい。なお、下の図は出発してから 1 秒後の様子を表している。



- (1) P, Q が出発してから 5 秒後の白色と黄色のラインの長さをそれぞれ求めなさい。
(2) 初めて全ての辺が白色となるのは P, Q が出発してから何秒後か求めなさい。
(3) 黄色のラインの長さが最大となるとき、その長さを求めなさい。
(4) 全ての辺が白色になってから、もう一度全ての辺が白色になるまでの間に、黄色のラインの長さが白色のラインの長さ以上になる時間は、何秒間あるか求めなさい。

(1) 5秒後の点P, 点Qの位置を確認してみましょう。

点Pは $5 \times 5 = 25$ 進み, 点Qは $3 \times 5 = 15$ 進んでいるので, 位置を図示すると下のようになります。



ラインの色は後から引いた色になるので,
 白色の部分は辺 AB, 辺 BC, 線分 CP,
 黄色の部分は線分 PD, 線分 DQ である。
 したがって, 白色の部分は $10 + 10 + 5 = 25$
 黄色の部分は $5 + 5 = 10$

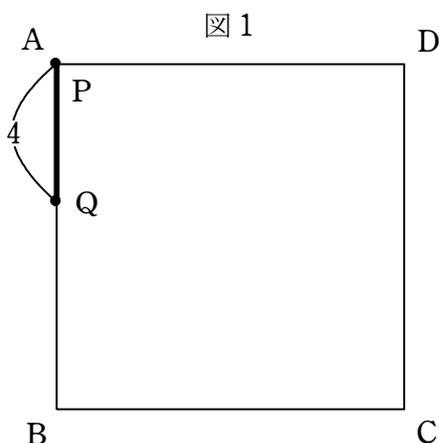
(2) 全ての辺が白色になる条件は

(i) 点Pが少なくとも正方形 ABCD を1周している。

(ii) 点Pが点Qに追いつく。

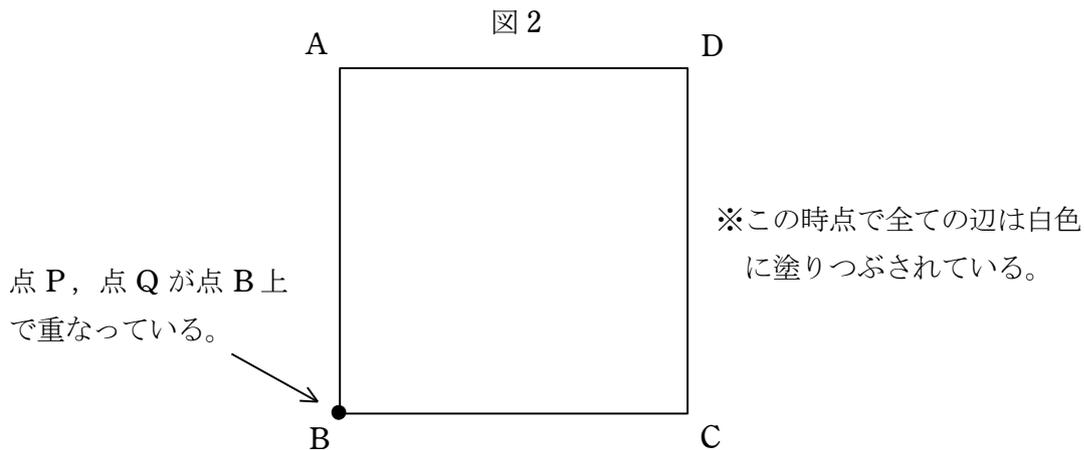
の2つの条件を満たすときとなります。

では点Pが正方形 ABCD を1周するには何秒かかるかを求めましょう。正方形の4辺の長さの合計は40, 点Pは1秒で5進むので, $40 \div 5 = 8$, すなわち8秒で正方形 ABCD を1周することがわかります。また, このときの点Qの位置は $3 \times 8 = 24$, つまり点P, 点Qはそれぞれ図1の位置にあることになります。



この時点では点Pは点Qに追いついていないので, 図1の太線部分だけは黄色に塗りつぶされている部分になります。点Pは1秒間に5だけ, 点Qは1秒間に3だけ進むので, 点Pと点Qは1秒間に $5 - 3 = 2$ だけ距離を縮めることとなります。図1の時点での点Pと点Qとの距離は4なので, 点Pが点Qに追いつくのは図1の時点から $4 \div 2 = 2$ すなわち2秒後。図1はスタートしてから8秒後の様子なので, 初めて全ての辺が白色になるのは $8 + 2 = 10$, すなわち10秒後となります。

- (3) 点 P が点 C に着くまでに $20 \div 5 = 4$, すなわち 4 秒かかります。このとき、点 Q は $3 \times 4 = 12$ 進んでいるので、黄色のラインの長さは 12 です。このあと、点 P の方が点 Q よりも早いので、黄色のラインは白色に塗りつぶされていき、黄色のラインは 12 より短くなっていきます。次に点 P が点 Q に追いついた後の黄色のラインの長さについて考えてみましょう。(2) より、点 P が点 Q に追いつくのは 10 秒後であり、このとき、点 P、点 Q は共に点 B 上にあります(図 2)。このあと、点 P の方が点 Q より早いので、黄色のラインの長さは増え始める。したがって、黄色のラインの最大となるのは、点 P が再び点 B に着くときであることがわかります。点 P が正方形を 1 周するには、 $40 \div 5 = 8$ 秒かかるので、この間に点 Q が動く距離は $3 \times 8 = 24$ となります。したがって、黄色のラインが最大となるとき、その長さは 24 となります。



- (4) 正方形の全ての辺の合計が 40 なので、黄色のラインの長さが 20 以上になる時間が答えとなります。(3) より、黄色の長さが最大するとき 24 , また、その後黄色の長さは毎秒 2 ずつ白色に塗りつぶされていくので、黄色の長さが最大になってから 20 になるまでが $(24 - 20) \div 2 = 2$, すなわち 2 秒。次に最初に黄色の長さが 20 になってから最大の 24 になるまでの時間を求めてみましょう。最初に黄色の長さが 20 になるのは、点 Q が図 2 の位置から点 D へ進んだときになります。ここからさらに 4 進むと黄色の長さが 24 になるので、点 D から黄色のラインが最大となるときまでにかかる時間は、 $(24 - 20) \div 3 = \frac{4}{3}$, すなわち $\frac{4}{3}$ 秒となります。したがって、黄色の長さが最初に 20 になってから、再び 20 になるまでの時間は $\frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$, すなわち $\frac{10}{3}$ 秒間となります。

=参考=

x 軸は秒数, y 軸に白色, 黄色のそれぞれの部分の長さとしたときのグラフが以下ようになります。
長さが規則的に変化している様子がわかりますね!

