

平成29年度 入試問題の解答と解説 (数学)

平成29年2月10日に行われた入学試験の問題のうち、問5について解答と解説を行います。
まずは問題を読んでみましょう。

問5 A, B, C, D, E, Fの6チームに分かれて、次のように運動会を行う。

- ① 競技は『綱引き、大玉送り、玉入れ、リレー』の4種目をこの順に行う。
- ② 各種目1位から6位までを決定する。1位は60点、2位は50点、3位は40点、4位は30点、5位は20点、6位は10点を獲得する。ただし、各種目において同じ順位のチームはないものとする。
- ③ 4種目の合計点で最も得点の高いチームを優勝とし、同点の場合はそのすべてのチームを優勝とする。

玉入れが終わったときの各チームの得点は次の表のようになった。なお、 $p \sim v$ は各チームの各種目の得点を表している。

綱引き	60	50	p	q	r	s
大玉送り	20	t	u	v	10	50
玉入れ	40	30	50	20	60	10
リレー						

いま、この表は次の(i)～(iii)を満たしている。

- (i) Cチームの綱引きと大玉送りの得点は同じである。
- (ii) 大玉送りが終わったとき、DチームはBチームに対して2種目の合計点で上回っていた。
- (iii) 3種目の合計点が最も高いチームと最も低いチームとの得点の差はちょうど60点であった。

次の各問いに答えなさい。

- (1) v の値を求めなさい。
- (2) q, r, s の値をそれぞれ求めなさい。
- (3) Aはリレーで2位になった結果、単独優勝した。リレーの順位として考えられる組合せは全部で何通りあるか。

まず、解答ですが、

(1) $v=60$ (2) $q=30, r=20, s=10$ (3) 36通り

です。「適当に当てはめているうちにできちゃった。」では、正解とはいえません。理論的に考えてみましょう。

(1) の解答

最初に「(i) Cチームの綱引きと大玉送りの得点は同じである。」に注目しましょう。綱引きと大玉送りのそれぞれに表示されている得点を見てみると共通して表示されていないのは30点と40点です。この段階で $p=u=30$ または $p=u=40$ のいずれかだということが分かります。ということは、大玉送りに注目すると60点を獲得したのはBチームかDチームです。

ここで、ある仮定をします。「Bチームが60点を獲得した」としましょう。そうするとBチームの綱引きと大玉送り2種目の合計点は110点です。「(ii) 大玉送りが終わったとき、DチームはBチームに対して2種目の合計点で上回っていた。」からDチームは2種目の合計が120点以上でなくてはなりません、これは不可能です。

以上から、大玉送りで60点を獲得したのはDチームと分かります。よって、 $v=60$ です。

(2) の解答

「(iii) 3種目の合計点が最も高いチームと最も低いチームとの得点の差はちょうど60点であった。」に注目します。「(i) Cチームの綱引きと大玉送りの得点は同じである。」に注意しながら、各チームの3種目の合計点として可能性のある最高点を考えるとAチーム120点、Bチーム120点、Cチーム130点、Dチーム120点、Eチーム110点、Fチーム100点です。

ここで仮定をします。「3種目の合計が1位のチームの得点が120点であった。」としましょう。1位と6位との得点差は60点ですから6位のチームは60点です。しかし、それを満たすチームはありません。したがって、1位のチームの得点は130点以上でなくてはなりません。

これを満たすことができるのはCチームしかありません。それはCチームが綱引き・大玉送りの両種目で3位となり40点を獲得したときです。よって、 $p=u=40$ です（さらに $t=30$ も分かります）。3種目1位のチームが130点ですから、6位のチームは70点です。これを満たすのはFチームが綱引きで6位だったのみです。したがって、 $s=10$ 。

ここまでで、決まっていないのは綱引きの4位と5位です。再び「(ii) 大玉送りが終わったとき、DチームはBチームに対して2種目の合計点で上回っていた。」に注目しましょう。すでにBチームの2種目の合計は80点と分かっています。綱引きでDチームが5位だったとしたら、Dチームの2種目の合計は80点ですから、Bチームと同点となり、上回ったことになりません。したがって綱引きではDチームが4位、残ったEチームが5位と確定します。すなわち、 $q=30, r=20$ です。

以上まとめると、 $q=30, r=20, s=10$ です。

(3) の解答

Aチームはリレーで2位となって優勝しました。このときのAチームの得点は170点です。リレーを除く3種目の合計を確認しておきましょう ($p \sim v$ は全て分かっていますね)。

Bチーム110点, Cチーム130点, Dチーム110点, Eチーム90点, Fチーム70点
この結果, B・C・Dの各チームがリレーで1位だった場合はAチームは単独優勝できません。ということはリレーで1位だったのはEチームかFチームです。

2位はAチームですから, B・C・Dの各チームは3位以下ですが, Cが3位の場合は4種目170点でAチームと並んでしまいます。したがってCは4位以下です。

以上まとめるとリレーの順位は次のようになります。

1位	・・・ EチームかFチームのいずれか	(2通り)
2位	・・・ Aチーム	(1通り)
3位	・・・ 1位とAチームとCチームを除く3チームのいずれか	(3通り)
4位	・・・ 残り3チームのいずれか	(3通り)
5位	・・・ 残り2チームのいずれか	(2通り)
6位	・・・ 残り1チーム	(1通り)

これを樹形図にしてみましょう (ちょっと大変ですが各自の練習問題とします)。36通りになりましたか？

以上で, 解答と解説を終わりますが, いかがでしたか？

理論的に考えることは数学に限らず, 全ての学問につながります。そして, 私たちの生活につながります。普段から理論的に考えることを意識しましょう。

さて, 余談ですがこの問題, 娘と地域運動会に行ったときに思いつきました。午前中の競技が終わったとき私の所属する地区が2位だったので, 逆転優勝するにはどうしたよいか考えたのがきっかけでした (結果は優勝できず, 残念 (T_T))。日常の中に数学の題材はあふれています。君たちも身の回りの物や出来事の中の数学を見つけてみてください。